数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 131-139



# ユークリッド空間における locally inner product set の元の個数の上界

九州大学数理学研究院　野崎　寛 (Hiroshi Nozaki)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

## 1 概要

$d$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の有限部分集合 $X$ が (locally) inner product set であるとき，$X$ の元の個数に対して，ある自然な上界が知られている．その上界は，Deza-Francl によって示された．この講究録では，その上界の証明をより簡明に与える．それは，Delsarte-Goethals-Seidel が単位球面上の inner product set の上界を求めるときに用いた手法を応用して得られる．

また，その証明の過程を見ることで，特に必要と思われる性質を抜き出し，inside inner product set というものを定義する．inside inner product set は locally inner product set の一般化となっている．また inside inner product set は locally inner product set と同じ上界が得られ，それを達成する具体例も見つけることが出来る．

この上界は Euclidean design の元の個数の下界とも関係が深い．最後に，tight Euclidean design の例の中から，上界を達成する inside inner product set となっているものを紹介する．

## 2 導入

$\mathbb{R}^d$ を $d$ 次元ユークリッド空間とする．$\mathbb{R}^d$ の元 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_d)$，$y=(y_1,y_2,\ldots,y_d)$ に対して，内積を

$$(x,y):=\sum_{i=1}^{d}x_iy_i$$

と定義する．$X$ を $\mathbb{R}^d$ の有限部分集合とし，$A(X)$ を

$$A(X):=\{(x,y)\mid \forall x,y\in X,\, x\neq y\}$$

と定義する．$A(X)$ の元の個数が $s$ のとき，$X$ を $s$-**inner product set** と呼ぶ．また，それぞれの $x\in X$ に対して，$A(x)$ を

$$A(x)=\{(x,y)\mid \forall y\in X,\, x\neq y\}$$

と定義し，全ての $x \in X$ について $|A(x)| \leq s$ となるとき，$X$ を **locally $s$-inner product set** と呼ぶ．明らかに，$s$-inner product set は locally $s$-inner product set であり，locally inner product set は inner product set の一般化になっている．locally $s$-inner product set の元の個数について次のような上界が示されている．

**Theorem 2.1** (Deza-Frankl [8]). *$X$ を $\mathbb{R}^d$ 上の locally $s$-inner product set とする．そのとき，*

$$|X| \leq \binom{d+s}{s}.$$

この講究録では，この定理に簡明な証明を与える．その方法は Delsarte-Goethals-Seidel [7] の方法を応用したものである．有限個の点の集合 $X \subset \mathbb{R}^d$ は，原点を中心とする有限個の球の上に配置されている．次のように記号を定義する．

- $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid ||x|| = 1\}$．ここで $||x|| := \sqrt{(x,x)}$.
- $RS := S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_p \subset \mathbb{R}^d$．ここで $S_i$ は原点を中心とする半径 $r_i$ の球．$0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_p$．$r_1 = 0$ のときは $S_1$ は原点になるが，それも特別な球としてみなす．
- $X_i := X \cap S_i$, $\quad \varepsilon_{RS} := \begin{cases} 1 & RS \text{ が原点を含むとき} \\ 0 & RS \text{ が原点を含まないとき} \end{cases}$.

Delsarte-Goethals-Seidel [7] の方法を応用して，より良い上界である次の定理が証明される．

**Theorem 2.2.** *1. $X \subset RS \subset \mathbb{R}^d$ を locally $s$-inner product set とする．$s \geq 2(p - \varepsilon_X)$ を満たすとき，*

$$|X| \leq \varepsilon_{RS} + \sum_{i=0}^{2(p-\varepsilon_{RS})-1} \binom{d+s-i-1}{d-1}. \tag{2.1}$$

*また，$s \leq 2(p - \varepsilon_{RS}) - 1$ を満たすとき，*

$$|X| \leq \binom{d+s}{s}. \tag{2.2}$$

*2. $X \subset RS \subset \mathbb{R}^d$ を極対的な locally $s$-inner product set とする．*

- *$s$ が奇数のとき (このとき $X$ は原点を含まない)．*
  *$s \geq 2p$ のとき，*

$$|X| \leq 2\sum_{i=0}^{p-1} \binom{d+s-2i-2}{d-1}. \tag{2.3}$$

*$s \leq 2p-1$ のとき，*

$$|X| \leq 2\sum_{i=0}^{\frac{s-1}{2}} \binom{d+s-2i-2}{d-1}. \tag{2.4}$$

- $s$ が偶数のとき.
  $s \geq 2(p-\varepsilon_{RS})$ のとき,

$$|X| \leq \varepsilon_{RS} + 2 \sum_{i=0}^{(p-\varepsilon_{RS})-1} \binom{d+s-2i-2}{d-1}. \tag{2.5}$$

  $s \leq 2(p-\varepsilon_{RS})-1$ のとき,

$$|X| \leq \varepsilon_{RS} + 2 \sum_{i=0}^{\frac{s-2}{2}} \binom{d+s-2i-2}{d-1}. \tag{2.6}$$

$X$ が極対的であるとは, $-X := \{-x \mid x \in X\} \subset X$ を満たすときをいう.
この講究録で用いる記号をいくつか紹介する.

- $\mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d)$: $s$ 次以下の $d$ 変数斉次多項式全体が張る線形空間.
- $\mathrm{Hom_s}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$: $s$ 次の $d$ 変数斉次多項式全体が張る線形空間.
- $\mathrm{Harm_s}(\mathbb{R}^\mathrm{d}) := \{f \in \mathrm{Hom_s}(\mathbb{R}^\mathrm{d}) \mid \Delta f = 0\}$. ここで $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i}$. $\Delta f = 0$ を満たす多項式を調和多項式と呼ぶ.
- $\mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d) := \oplus_{i=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \mathrm{Hom_{s-2i}}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$. ここで $\lfloor s/2 \rfloor$ は, $s/2$ を超えない最大の整数を表す.
- $\mathrm{P}_s(RS)$, $\mathrm{Hom_s(RS)}$, $\mathrm{Harm_s(RS)}$ と書いて, それぞれ対応する集合を $RS$ 上に制限したものとする. 例えば, $\mathrm{P}_s(RS) = \{f|_{RS} \mid f \in \mathrm{P}_s(RS)\}$.

上の多項式の線形空間たちについて, 以下のことはよく知られている.

**Theorem 2.3** ([9], [10]). *1.* $\dim(\mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d)) = \binom{d+s}{s}$. $\dim(\mathrm{Hom_s}(\mathbb{R}^\mathrm{d})) = \binom{\mathrm{d+s-1}}{\mathrm{d-1}}$.

*2.* $\varphi : \mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{P}_s(RS)$ を $\varphi : f \mapsto f|_{RS}$ と自然に線形写像 $\varphi$ を定義する. $RS$ が原点を含まないとき,

$$\ker(\varphi) = \prod_{i=1}^{p} (||x||^2 - r_i)\mathrm{P}_{s-2p}(\mathbb{R}^d).$$

*3.* $RS$ が原点を含まないとき, $\mathrm{P}_s(RS) \cong \oplus_{i=0}^{2p-1} \mathrm{Hom_{s-i}}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ であり, $\dim(\mathrm{P}_s(RS)) = \sum_{i=0}^{2p-1} \binom{d+s-i-1}{d-1}$. 特に, $s \leq 2p-1$ のとき $\mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d) \cong \mathrm{P}_s(RS)$.

*4.* $\phi : \mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{P}_s^*(RS)$ を $\phi : f \mapsto f|_{RS}$ と自然に線形型写像 $\phi$ を定義する. $RS$ が原点を含まないとき,

$$\ker(\phi) = \prod_{i=1}^{p} (||x||^2 - r_i)\mathrm{P}^*_{s-2p}(\mathbb{R}^d).$$

*5.* $RS$ が原点を含まないとき, $\mathrm{P}_s^*(RS) \cong \oplus_{i=0}^{p-1} \mathrm{Hom_{s-2i}}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ であり, $\dim(\mathrm{P}_s^*(RS)) = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{d+s-2i-1}{d-1}$. 特に, $s \leq 2p-1$ のとき $\mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d) \cong \mathrm{P}_s^*(RS)$.

RSが原点を含むときを考察する. $\varphi_1 : \mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{P}_s(RS)$, $\varphi_2 : \mathrm{P}_s(RS) \to \mathrm{P}_s(RS\backslash\{0\})$, $\varphi : \mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{P}_s(RS\setminus\{0\})$ をそれぞれ、対応する空間への制限を与えることで得られる自然な線形写像とする. 明らかに $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$. $\ker(\varphi_1)$ は $\varphi_1$ により $0 \in \mathrm{P}_s(RS)$ に写され, さらに $0 \in \mathrm{P}_s(RS)$ は $\varphi_2$ により $0 \in \mathrm{P}_s(RS\backslash\{0\})$ に写される. つまり, $\ker(\varphi_1) \subset \ker(\varphi)$ である. Theorem 2.3, 2 より, $\ker(\varphi) = \prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i)\mathrm{P}_{s-2(p-1)}(\mathbb{R}^d)$ であるから, $s-2(p-1) \geq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\ker(\varphi)) &= \varphi_1\left(\prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i)\mathrm{P}_{s-2(p-1)}(\mathbb{R}^d)\right) &\quad (2.7)\\
&= \varphi_1\left(\prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i) \oplus_{k=0}^{s-2(p-1)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})\right) &\quad (2.8)\\
&= \prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i)\mathrm{Hom}_0(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}). &\quad (2.9)
\end{aligned}$$

ゆえに, $\ker(\varphi_1) = \prod_{i=1}^{p}(||x||^2 - r_i) \oplus_{k=1}^{s-2(p-1)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$ であるから,

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{P}_s(RS)) &= \dim(\mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d)) - \dim(\ker(\varphi_1)) &\quad (2.10)\\
&= 1 + \sum_{i=0}^{2(p-1)-1} \binom{d+s-i-1}{d-1} &\quad (2.11)
\end{aligned}$$

$s \leq 2(p-1)-1$ のときは, $\ker(\varphi) = 0$ となるから, $\varphi_1$ は単射となり, $\mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d) \cong \mathrm{P}_s(RS)$ が得られる. Theorem 2.3, 3 とあわせると, 次のようになる.

**Theorem 2.4.** $s \geq 2(p - \varepsilon_{RS})$ のとき,

$$\dim(\mathrm{P}_s(RS)) = \varepsilon_{RS} + \sum_{i=0}^{2(p-\varepsilon_{RS})-1} \binom{d+s-i-1}{d-1}. \quad (2.12)$$

$s \leq 2(p - \varepsilon_{RS}) - 1$ のとき,

$$\dim(\mathrm{P}_s(RS)) = \dim(\mathrm{P}_s(\mathbb{R}^d)) = \binom{d+s}{s}. \quad (2.13)$$

次に, 同様に $\mathrm{P}_s^*(RS)$ についても考察する. $\phi_1 : \mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{P}_s^*(RS)$, $\phi_2 : \mathrm{P}_s^*(RS) \to \mathrm{P}_s^*(RS\setminus\{0\})$, $\phi : \mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{P}_s^*(RS\setminus\{0\})$ と自然な線形写像を定義する. 上と同様の議論で, $\ker(\phi_1) \subset \ker(\phi)$ である. Theorem 2.3, 4より, $\ker(\varphi) = \prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i)\mathrm{P}^*_{s-2(p-1)}(\mathbb{R}^d)$ である. $s$ が偶数かつ $s-2(p-1) \geq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\phi_1(\ker(\phi)) &= \phi_1\left(\prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i)\mathrm{P}^*_{s-2(p-1)}(\mathbb{R}^d)\right) &\quad (2.14)\\
&= \phi_1\left(\prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i) \oplus_{k=0}^{\frac{s-2(p-1)}{2}} \mathrm{Hom}_{2\mathrm{k}}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})\right) &\quad (2.15)\\
&= \prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i)\mathrm{Hom}_0(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}). &\quad (2.16)
\end{aligned}$$

ゆえに，$\ker(\phi_1) = \prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i) \oplus_{k=1}^{\frac{s-2(p-1)}{2}} \mathrm{Hom}_{2k}(\mathbb{R}^d)$ であるから，

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{P}_s^*(RS)) &= \dim(\mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d)) - \dim(\ker(\phi_1)) &\quad (2.17)\\ &= 1 + \sum_{i=0}^{(p-1)-1} \binom{d+s-2i-1}{d-1} &\quad (2.18) \end{aligned}$$

$s$ が奇数かつ $s - 2(p-1) \geq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} \phi_1(\ker(\phi)) &= \phi_1\left(\prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i)\mathrm{P}_{s-2(p-1)}^*(\mathbb{R}^d)\right) &\quad (2.19)\\ &= \phi_1\left(\prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i) \oplus_{k=0}^{\frac{s-2(p-1)-1}{2}} \mathrm{Hom}_{2k+1}(\mathbb{R}^d)\right) &\quad (2.20)\\ &= 0 &\quad (2.21) \end{aligned}$$

ゆえに，$\ker(\phi_1) = \prod_{i=2}^{p}(||x||^2 - r_i)\mathrm{P}_{s-2(p-1)}^*(\mathbb{R}^d)$ であるから，

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{P}_s^*(RS)) &= \dim(\mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d)) - \dim(\ker(\phi_1)) &\quad (2.22)\\ &= \sum_{i=0}^{(p-1)-1} \binom{d+s-2i-1}{d-1} &\quad (2.23) \end{aligned}$$

$s \leq 2(p-1)-1$ のときは，$\ker(\phi) = 0$ となり，$\phi_1$ は単射．よって，$\mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d) \cong \mathrm{P}_s^*(RS)$. ゆえに，

$$\dim(\mathrm{P}_s^*(RS)) = \dim(\mathrm{P}_s^*(\mathbb{R}^d)) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \binom{d+s-2i-1}{d-1} \quad (2.24)$$

Theorem 2.3, 5 とあわせると，次のようになる．

**Theorem 2.5.** $s$ が偶数かつ $s \geq 2(p - \varepsilon_{RS})$ のとき，

$$\dim(\mathrm{P}_s^*(RS)) = \varepsilon_{RS} + \sum_{i=0}^{(p-\varepsilon_{RS})-1} \binom{d+s-2i-1}{d-1}. \quad (2.25)$$

$s$ が奇数かつ $s \geq 2(p - \varepsilon_{RS})$ のとき，

$$\dim(\mathrm{P}_s^*(RS)) = \sum_{i=0}^{(p-\varepsilon_{RS})-1} \binom{d+s-2i-.1}{d-1}. \quad (2.26)$$

$s \leq 2(p - \varepsilon_{RS}) - 1$ のとき，

$$\dim(\mathrm{P}_s^*(RS)) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \binom{d+s-2i-1}{d-1} \quad (2.27)$$

## 3 Theorem 2.2, 1の証明

Theorem 2.2, 1 の証明を与えよう.

*Proof.* $X \subset RS \subset \mathbb{R}^d$ を locally $s$-inner product set であるとする. また, それぞれの $x \in X$ について, $A(x)$ の部分集合 $B(x)$ を次のように定義する.

$$B(x) := \{(x,y) \mid x \neq y \in X, ||y|| \leq ||x||\}.$$

$B(x)$ は $A(x)$ の部分集合であるから, $|B(x)| \leq |A(x)| \leq s$ である. とくに, $B(x)$ の任意の元 $\alpha$ は $-||x||^2 \leq \alpha < ||x||^2$ を満たしている.

それぞれの $x \in X$ について次の多項式を定義する.

$$f_x(\xi) = \prod_{\alpha \in B(x)} \frac{(x,\xi)-\alpha}{(x,x)-\alpha} \quad B(x) \text{ が空集合でないとき}$$
$$f_x(\xi) = 1 \text{ (定数関数)} \quad B(x) \text{ が空集合のとき}$$

ここで $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$ であり, $f_x(\xi)$ は $d$ 変数多項式である. $B(x)$ が空集合となるのは, $|X_1| = 1$ である場合の $x \in X_1$ に限るから, $f_x(\xi) = 1$ となる $x \in X$ の個数は高々1である. $|B(x)| \leq s$ であるから, $f_x(\xi)$ は $s$ 次以下の多項式である. また, 定義より,

$$f_x(x) = 1, \tag{3.1}$$
$$f_x(y) = 0, \quad y \in X \text{ かつ } ||y|| \leq ||x|| \text{ のとき} \tag{3.2}$$

を満たしている. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}(|X| = n, ||x_i|| \leq ||x_{i+1}||)$ とおく. $M$ を行と列が $X$ で添え字づけられた $n \times n$ 行列とし, その $(x_i, x_j)$ 成分を $F_{x_i}(x_j)$ と定義する. このとき,

$$M = \begin{bmatrix} I_{|X_1|} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \mathbb{O} & I_{|X_2|} & * & \cdots & \cdots & * \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & I_{|X_3|} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & I_{|X_p|} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

となる. ここで $I_{X_i}$ は $|X_i| \times |X_i|$ 単位行列である. よって $M$ は正則行列である. $g_{x_i}(\xi)$ を次のように定義する.

$$\begin{bmatrix} g_{x_1}(\xi) \\ g_{x_2}(\xi) \\ \vdots \\ g_{x_n}(\xi) \end{bmatrix} := M^{-1} \begin{bmatrix} f_{x_1}(\xi) \\ f_{x_2}(\xi) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\xi) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

すると, $g_{x_i}(\xi)$ は $s$ 次以下の多項式で,

$$g_{x_i}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.5}$$

を満たしている. よって, $\{g_{x_i}\}_{i=1,2,\ldots,n}$ たちは $\mathrm{P}_s(RS)$ の元として, 一次独立である. したがって,

$$|X| \leq \dim(\mathrm{P}_s(RS)). \tag{3.6}$$

Theorem 2.4 より, 定理の主張が得られた. □

# 4 Theorem 2.2, 2の証明

Theorem 2.2, 2の証明を与えよう.

*Proof.* $X \subset RS \subset \mathbb{R}^d$ を極対的な locally $s$-inner product set とする. $X$ が $0$ を含んでいないとき, $X = Y \cup (-Y)$ かつ $Y \cap (-Y) = \emptyset$ となる部分集合 $Y$ が存在する. $X$ が $0$ を含むときは, $X' := X \setminus \{0\}$ とするとき, $X' = Y' \cup (-Y')$ かつ $Y' \cap (-Y') = \emptyset$ となる部分集合 $Y'$ が存在する. そして, $Y := Y' \cup \{0\}$ と定義する. このとき, $|X| = 2|Y| - \varepsilon_{RS}$ である. それぞれの $y \in Y$ について,

$$B^2(y) := \{\alpha^2 \mid \alpha \in B(y), \alpha \neq 0, \alpha \neq -(y,y)\}$$

と定義する. このとき $|B^2(y)| = \lfloor (s-1)/2 \rfloor$ となる. 任意の $\alpha^2 \in B^2(y)$ について, $0 < \alpha^2 < (y,y)^2$ を満たしている. それぞれの $0 \neq y \in Y$ について, 多項式

$$f_y(\xi) := \left(\frac{(y,\xi)}{(y,y)}\right)^{(s-1)-2\lfloor (s-1)/2 \rfloor} \prod_{\alpha^2 \in B^2(y)} \frac{(y,\xi)^2 - \alpha^2}{(y,y)^2 - \alpha^2}$$

z を定義する. $s$ が奇数のとき, $0 \notin B(x)$ であるから, s が奇数のときは, $X$ は原点を含むことが出来ない. $s$ が偶数でかつ, $X$ が $0$ を含むとき $f_0 := 1$ とする. このとき, $f_y(\xi) \in \mathrm{P}^*_{s-1}(\mathbb{R}^d) \cup \varepsilon_{RS}\,\mathrm{Hom}_0(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$ であり,

$$f_y(y) = 1, \tag{4.1}$$

$$f_y(z) = 0, \quad y \neq z \in Y \text{ かつ } ||z|| \leq ||y|| \tag{4.2}$$

を満たしている. $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ とする. Theorem 2.2, 1 の証明と同様の議論で, $g_{y_i}(y_j) = \delta_{i,j}$ となる $g_{y_i}(\xi) \in \mathrm{P}^*_{s-1}(\mathbb{R}^d) \cup \varepsilon_{RS}\,\mathrm{Hom}_0(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$ が構成できる. よって, $\{g_{y_i}\}_{i=1,2,\ldots,n}$ は $\mathrm{P}^*_{s-1}(RS) \cup \varepsilon_{RS}\,\mathrm{Hom}_0(\mathrm{RS})$ の元として一次独立である. したがって,

$$\begin{aligned} |Y| &\leq \dim(\mathrm{P}^*_{s-1}(RS) \cup \varepsilon_{RS}\,\mathrm{Hom}_0(\mathrm{RS})) & (4.3)\\ &= \begin{cases} \dim(\mathrm{P}^*_{s-1}(RS)) + \varepsilon_{RS} & s-1 \text{ が奇数のとき} \\ \dim(\mathrm{P}^*_{s-1}(RS)) & s-1 \text{ が偶数のとき} \end{cases}. & (4.4) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} |X| &= 2|Y| - \varepsilon_{RS} & (4.5)\\ &\leq \begin{cases} 2\dim(\mathrm{P}^*_{s-1}(RS)) + \varepsilon_{RS} & s-1 \text{ が奇数のとき} \\ 2\dim(\mathrm{P}^*_{s-1}(RS)) & s-1 \text{ が偶数のとき} \end{cases}. & (4.6) \end{aligned}$$

Theorem 2.5 より, $s$ が奇数のとき, $\varepsilon_{RS} = 0$ となることに注意すると, 定理の主張を得る. □

# 5 Inside inner product set.

Theorem 2.2 の証明を考察すると, $|B(x)| \leq s$ の条件しか用いていないことに気付く. つまり, $|B(x)| \leq s$ の条件が本質的に, Theorem 2.2 の上界を与えている. このことから, locally $s$-inner product set の一般化として, 次の定義を与えるのが自然である.

**Definition 5.1** (Inside $s$-inner product set). 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^d$ について，$X$ が **inside $s$-inner product set** と呼ばれるのは，すべての $x \in X$ に対して $|B(x)| \leq s$ を満たすときである．ここで，$B(x) = \{(x,y) \mid x \neq y \in X, ||y|| \leq ||x||\}$.

**Theorem 5.1.** $X$ が *inside s-inner product set* のとき，$|X|$ は *Theorem 2.2* と同じ上界を与える．

この上界を達成する $X$ を tight と呼ぶことにする．

# 6 Euclidean designから得られる例

Euclidean design は spherical design の一般化として Neumaier-Seidel[11] によって与えられ，Bannai-Bannai[4] により原点を含めてもよい形で拡張された．

Euclidean design について，次のような下界が知られる．

**Theorem 6.1** ([5]). *1.* $X$ が *Euclidean 2e-design* のとき，

$$|X| \geq \dim(\mathrm{P}_e(RS))$$

*2.* $X$ が *Euclidean* $(2e-1)$*-design* のとき，

$$|X| \geq \begin{cases} 2\dim(\mathrm{P}^*_{e-1}(RS)) - 1 & e-1 \text{ が偶数かつ } 0 \in X \text{ のとき} \\ 2\dim(\mathrm{P}^*_{e-1}(RS)) & \text{その他} \end{cases}$$

この下界を達成するとき，$X$ を tight Euclidean design と呼ぶ．特に $0 \notin X$ のとき，この下界と，inside inner product set の上界が等しい．tight Euclidean design（tight spherical design）の例は [1], [2], [3], [4], [6] などによって，いくつか知られている．この章では tight Euclidean design の中から，tight inside inner product set となっているものを紹介する．以下，$X$ は原点を含まないものと仮定する．

- Tight spherical design は tight inner product set である [7]．
- Tight Euclidean 2-design は負の内積をもつ tight 1-inner product set である [6]．正の内積の tight 1-inner product set も具体的に構成できる．内積が正の例は，Euclidean 1-design にもなっていない．
- Tight Euclidean 3-design は極対的な tight locally 2-inner product set である [3]．これの逆も正しい．また，極対的な tight inside 2-inner product set は tight locally 2-inner product set である．
- 次の表は tight Euclidean $t$-design で tight inside $s$-inner product set となっている例である [1], [2], [3], [4]．ここで，$B(X_i) = \{B(x) \mid x \in X_i\}$.

$p = 3$

| $t$ | $d$ | $\|X\|$ | $\|X_1\|$ | $\|X_2\|$ | $\|X_3\|$ | $B(X_1)$ | $B(X_2)$ | $B(X_3)$ | $r_2$ | $r_3$ | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 26 | 6 | 12 | 8 | $-1, 0, \pm\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{1}{4}$ | $-3, 0, \pm 1$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\sqrt{3}$ | 4 |

$p = 2,\ r_1 = 1$

| $t$ | $d$ | $\lvert X\rvert$ | $\lvert X_1\rvert$ | $\lvert X_2\rvert$ | $B(X_1)$ | $B(X_2)$ | $r_2$ | s |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 6 | 3 | 3 | $-\frac{1}{2}$ | $-2$ | 2 | **2** |
| | 4 | 15 | 5 | 10 | $-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{9}, \frac{1}{36}$ | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | **2** |
| | 5 | 21 | 6 | 15 | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}$ | $\sqrt{\frac{8}{5}}$ | **2** |
| | 4 | 15 | 6 | 9 | $-\frac{1}{2}, 0$ | $-1, \frac{1}{2}$ | $\sqrt{2}$ | **2** |
| 5 | 3 | 14 | 6 | 8 | $-1, 0$ | $-3, \pm 1$ | $\sqrt{3}$ | **3** |
| | 5 | 32 | 12 | 20 | $-1, \pm\frac{1}{5}$ | $-\frac{9}{5}, \pm\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{\sqrt{5}}$ | **3** |
| | 5 | 32 | 12 | 20 | $-1, \pm\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{\sqrt{5}}$ | **3** |
| | 6 | 44 | 12 | 32 | $-1, 0$ | $-\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | **3** |
| 7 | 4 | 48 | 24 | 24 | $-1, 0, \pm\frac{1}{2}$ | $-2, 0, \pm 1$ | $\sqrt{2}$ | **4** |
| | 7 | 182 | 56 | 126 | $-1, 0, \pm\frac{1}{3}$ | $-\frac{4}{3}, 0, \pm\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | **4** |
| | 7 | 182 | 56 | 126 | $-1, 0, \pm\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}, 0, \pm\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | **4** |

$(t, d, |X|) = (5, 3, 14)$ の例のみが tight locally inner product set である.

# References


[1] B. Bajnok: Orbits of the hyperoctahedral group as Euclidean designs, *J. Alg. Comb.* 25 (2007), 375–397.

[2] Et. Bannai: New examples of Euclidean tight 4-designs, preprint.

[3] Et. Bannai: On antipodal Euclidean tight $(2e+1)$-designs. *J. Algebraic Combin.* 24 (2006), no. 4, 391–414.

[4] Ei. Bannai and Et. Bannai: On Euclidean tight 4-designs, *J. Math. Soc. Japan*, 58 (2006), no. 3, 775–804.

[5] E. Bannai, Et. Bannai, M. Hirao and M. Sawa: Cubature formulas in numerical analysis and Euclidean tight designs. preprint.

[6] E. Bannai, Et. Bannai, D. Suprijanto: On the strong non-rigidity of certain tight Euclidean designs. *European J. Combin.* 28 (2007), no. 6, 1662–1680.

[7] P. Delsarte, J.M. Goethals and J.J. Seidel: Spherical Codes and Designs, *Geom. Dedicata* 6 (1977), No. 3, 363–388.

[8] M. Deza and P. Frankl: Bounds on the maximum number of vectors with given scalar products. *Proc. Amer. Math. Soc.* 95 (1985), no. 2, 323–329.

[9] P. Delsarte and J. J. Seidel: Fisher type inequalities for Euclidean $t$-designs, *Lin. Algebra and its Appl.* 114–115 (1989), 213–230.

[10] A. Erdēlyi et al: *Higher Transcendental Functions II*, (Bateman Manuscript Project), MacGraw-Hill, 1953.

[11] A. Neumaier and J.J. Seidel, Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 50 (1988), no. 3, 321–334.